第 2 节 分段函数中的动态分段点问题（★★★）

内容提要

上一节我们学习了当分段函数解析式含参时，怎样根据函数的单调性求参数的范围，本节我们归纳当参数在分段点上时的有关问题，此时分段点是随着参数的变化而变化的，由此衍生出的函数问题，如研究零点、最值等，往往采用分类讨论或数形结合的方法求解.

典型例题

类型Ⅰ：研究分段点含参的分段函数的零点

【例 1】已知 $a>0$，若函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\le a\\ \ln x+2,x>a\end{cases}$ 有两个不同的零点，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\dfrac{1}{e^2})$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(\dfrac{1}{e^2},+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

解法 1：分段函数研究零点，分段分别考虑，注意到 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 和 $(a,+\infty)$ 上均↗，

所以要使 $f(x)$ 有 2 个零点，应满足 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 和 $(a,+\infty)$ 上各有 1 个零点，

当 $x\in(-\infty,a]$ 时，$f(x)=x+2$，令 $f(x)=0$ 可得 $x=-2$，

因为 $a>0$，所以 $-2\in(-\infty,a]$，故 -2 是 $f(x)$ 的 1 个零点；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f(x)=\ln x+2$，令 $f(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{e^2}$，所以 $\dfrac{1}{e^2}\in(a,+\infty)$，故 $0<a<\dfrac{1}{e^2}$.

解法 2：$f(x)$ 在两段上的解析式都很简单，可画图分析，注意到 $\ln x+2=0\Leftrightarrow x=e^{-2}$，所以按 a 和 e^{-2} 的大小来讨论，先把 $y=x+2$ 和 $y=\ln x+2$ 的完整曲线画出来，如图 1，

当 $0<a<e^{-2}$ 时，$f(x)$ 的图象如图 2，由图可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 和 $(a,+\infty)$ 上各有 1 个零点，满足题意；

当 $a=e^{-2}$ 时，$f(x)$ 的图象如图 3，由图可知 $f(x)$ 仅在 $(-\infty,a]$ 上有 1 个零点，不合题意；

当 $a>e^{-2}$ 时，$f(x)$ 的图象如图 4，由图可知 $f(x)$ 仅在 $(-\infty,a]$ 上有 1 个零点，不合题意；

综上所述，a 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{e^2})$.

答案：A

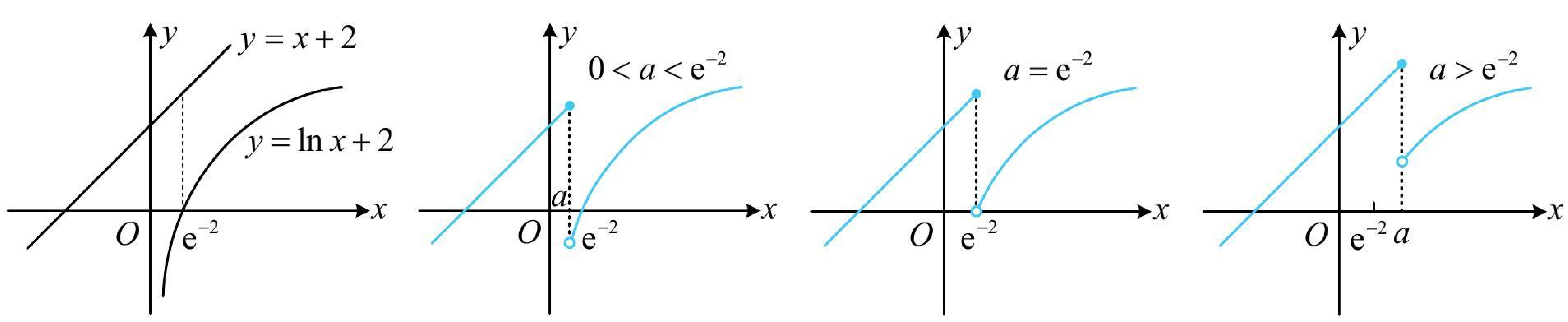

图1　　图2　　图3　　图4

【变式】已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-m|+2m,x\le 2m\\ -x^2+4mx-2m^2,x>2m\end{cases}$，其中 $m>0$，若存在实数 b，使得方程 $f(x)=b$ 有三个不同的实数解，则 m 的取值范围为（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,+\infty)$　　（C）$(0,\dfrac{3}{2})$　　（D）$(\dfrac{3}{2},+\infty)$

解析：由题意，问题等价于存在直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

要画 $f(x)$ 的图象，可研究其单调性，先把 $x\le 2m$ 那一段的绝对值去掉，将解析式细分为三段，

当 $x\in(-\infty,m)$ 时，$f(x)=-(x-m)+2m=3m-x$；当 $x\in[m,2m]$ 时，$f(x)=(x-m)+2m=x+m$；

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,m)$ 上↘，在 $[m,2m]$ 上↗；

当 $x>2m$ 时，$f(x)=-x^2+4mx-2m^2=-(x-2m)^2+2m^2$，所以 $f(x)$ 在 $(2m,+\infty)$ 上↘；

记 $f(x)$ 图象上的两个分段点分别为 $A(m,2m)$，$B(2m,2m^2)$，按 A，B 的位置关系可将图象分三类，

若 A，B 等高或 A 在 B 的上方，如图 1、图 2，都不存在直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点；

若 A 在 B 的下方，如图 3 和图 4，存在直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，所以 $2m<2m^2$，故 $m>1$.

答案：B

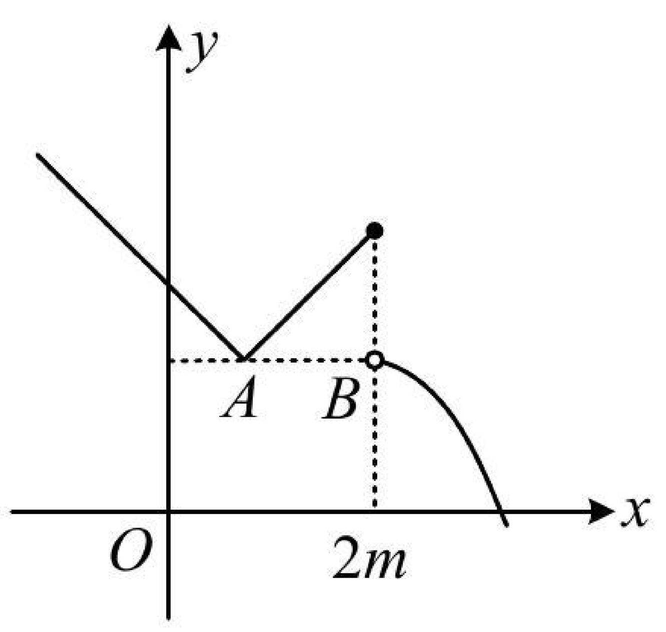

图1

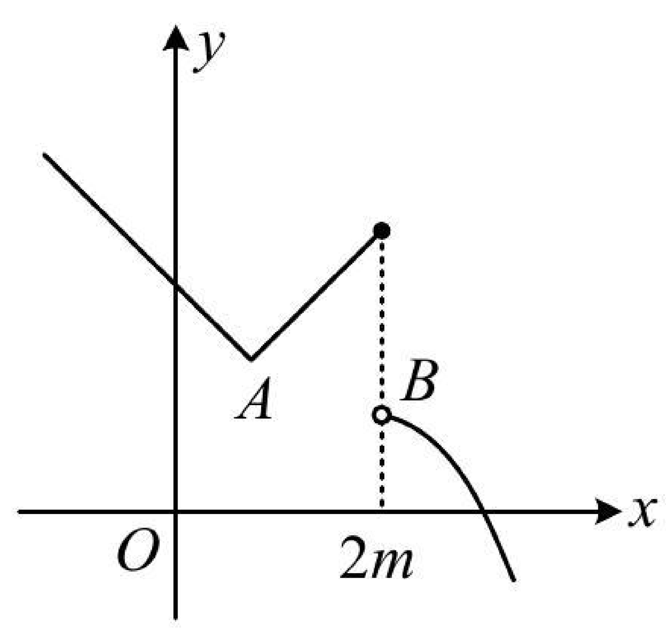

图2

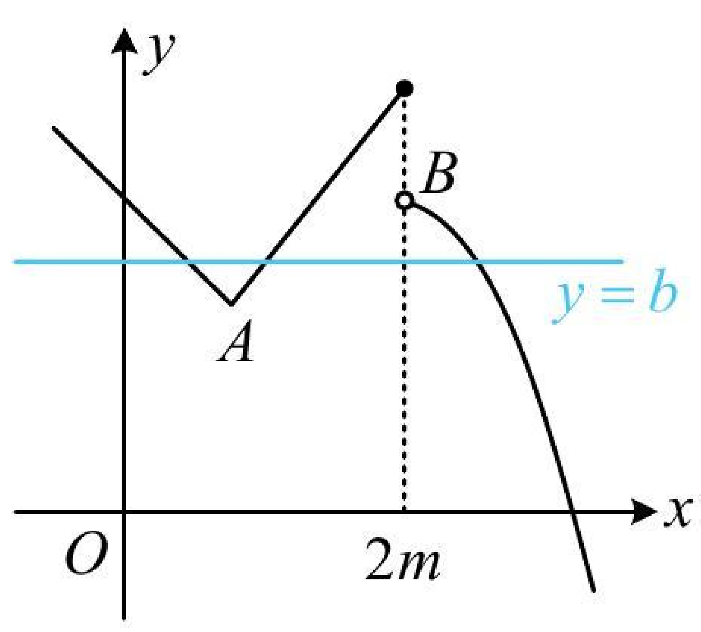

图3

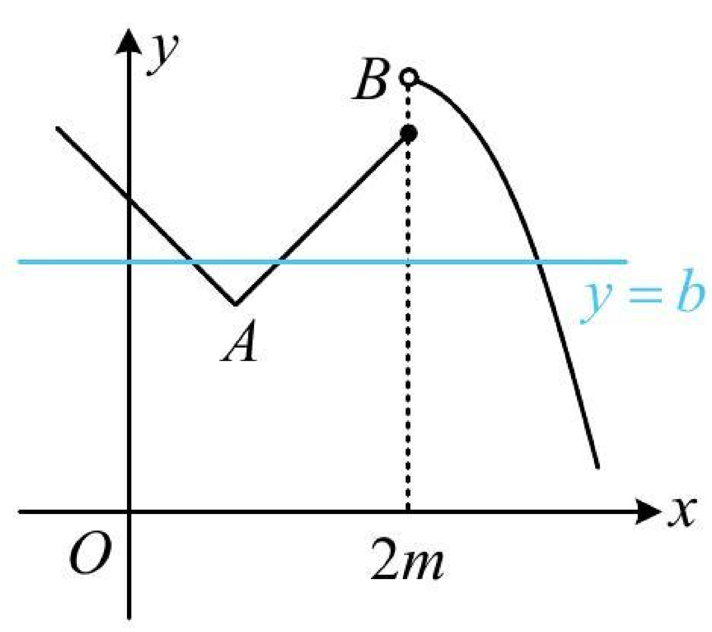

图4

【总结】含参的分段函数问题，常考虑画图辅助分析，想象分段点变化时图形的运动过程，抓住关键位置，但注意不要遗漏.

类型Ⅱ：研究分段点含参的分段函数的最值

【例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+a^2+1, x\le a\\ \ln x, x>a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$[1,+\infty)$　　（C）$(\mathrm{e},+\infty)$　　（D）$[\mathrm{e},+\infty)$

解析：注意到当 $x\le a$ 时，$f(x)=x^2-2ax+a^2+1=(x-a)^2+1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上↘，

按间断点处左右两侧的位置关系，$f(x)$ 的图象可能的情形有 3 种，如图，

其中图 1 和图 2，$f(x)$ 存在最小值，所以 $\ln a\ge 1$，故 $a\ge \mathrm{e}$.

答案：D

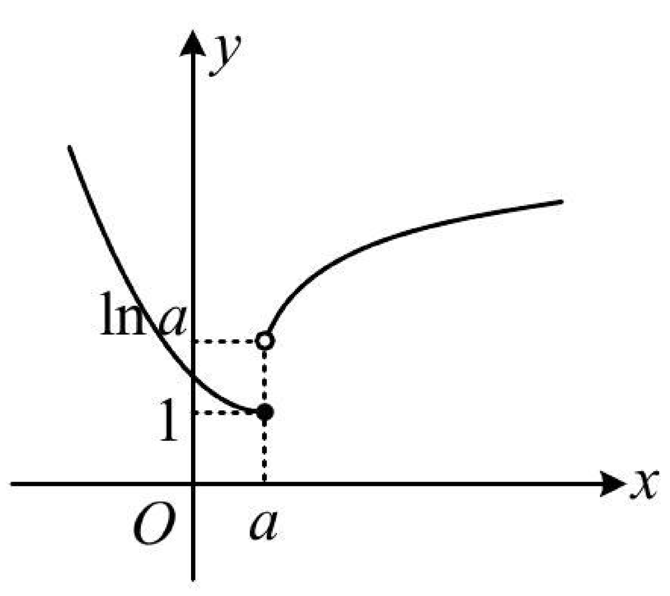

图1

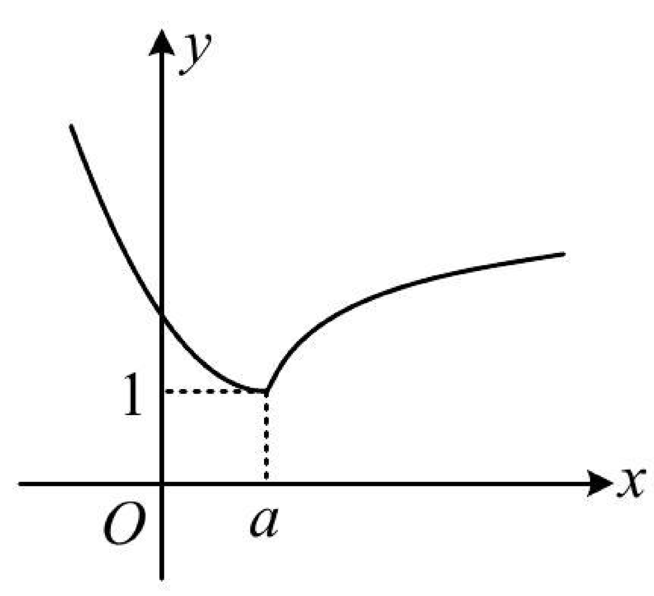

图2

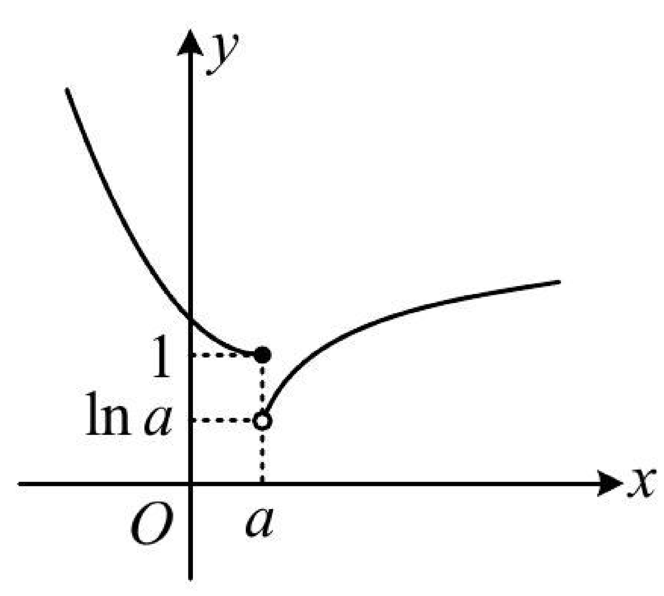

图3

【反思】对于分段函数，需要尤其重视分段处实心、空心点. 空心点处函数值取不到，意味着该点不能产生零点、交点、最值.

强化训练

1.（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le a\\ \sqrt{x},x>a\end{cases}$，其中 $a>0$，若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

2.（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x,x>a\\ x-x^2,x\le a\end{cases}$，其中 $a>0$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，则实数 a 的取值范围为_____.

3.（2022 • 北京模拟 • ★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le a\\ x^2-2ax+a,x>a\end{cases}$，若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围为_____.

4.（2022 • 北京卷 • ★★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1,x<a\\ (x-2)^2,x\ge a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个值为_____，a 的最大值为_____.